

Über kinematische Geradenabbildungen

Lübbert, Christoph

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979,
S.35-49



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über kinematische Geradenabbildungen *)

Von **Christoph Lübbert**, Darmstadt

Vorgelegt von Hans Robert Müller

1. Einleitung

Seit BLASCHKE [2] und GRÜNWARD [12] (1911) ist bekannt, daß man die dreigliedrige Gruppe G_E der direkten Bewegungen der euklidischen Ebene E in einen dreidimensionalen reellen projektiven Raum P^3 einbetten kann, derart, daß G_E den P^3 bis auf eine Gerade g_∞ ausfüllt, wobei die Geraden durch den Einspunkt eingliedrige Untergruppen von G_E sind. Eine Gerade g in $G_E = P^3 - g_\infty$ besteht dabei aus denjenigen Bewegungen, die einen bestimmten Punkt $X_L \in E$ in einen Punkt $X_R \in E$ überführen. Man erhält so eine „kinematische Geradenabbildung“

$$g \subset G_E \mapsto (X_L, X_R) \in E \times E,$$

welche jeder g_∞ nicht treffenden Geraden von P^3 umkehrbareindeutig ein Punktepaar der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene zuordnet. Hierdurch wird die Geometrie der Raumkurven und Regelflächen des „quasielliptischen Raumes“ (P^3, G_E) (BLASCHKE [3], BLASCHKE/MÜLLER [6]) auf die Kinematik der euklidischen Ebene E übertragen.

Ersetzt man g_∞ durch eine null- bzw. einteilige Quadrik S des P^3 , so sind analoge kinematische Geradenabbildungen in die elliptische Ebene (oder die euklidische Sphäre) bzw. die hyperbolische Ebene von HJELMSLEV [13], STUDY [27], FUBINI [11], STRUBECKER [24], BLASCHKE [4], H.R. MÜLLER [20], ECKHART [9], REHBOCK [21] u. a. her bekannt. Die Bewegungsgruppe der elliptischen bzw. hyperbolischen Ebene füllt dabei den P^3 bis auf die Quadrik S aus.

Das Prinzip der kinematischen Geradenabbildungen ist (wengstens lokal) verallgemeinerungsfähig auf jede Lie'sche Gruppe G (mit genügend kleinem Zentrum). Für unsere Belange genügt es, dieses Prinzip an einer r -gliedrigen Matrixliegruppe $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ klar zu machen: Ist \mathfrak{g} der Vektorraum der Liealgebra von G (die Elemente von \mathfrak{g} seien als n -reihige Matrizen dargestellt), so hat eine eingliedrige Untergruppe von G die Punktmenge

$$g = \{u(t)/t \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

mit einer natürlichen Parameterdarstellung

$$u: t \in \mathbb{R} \longrightarrow u(t) = \exp(t\mathbf{x}) = e + t\mathbf{x} + \frac{1}{2!}t^2\mathbf{x}^2 + \dots \quad (1.2)$$

wobei e die n -reihige Einheitsmatrix und $\mathbf{x} \neq 0$ ein festes Element aus \mathfrak{g} ist. In (1.1) ist der Parameter t nur bis auf lineare Transformationen $t \longrightarrow c_1 t + c_2$ ($c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$)

*) Die Note enthält überarbeitete Teile meiner Habilitationsschrift [17].

bestimmt. Als Menge Γ der „G-Geraden“ bezeichnen wir alle Untergruppen g der Form (1.1) und deren Translate ag, gb ($a, b \in G$). Eine G-Gerade k durch Punkt $a \in G$ kann als Rechts- oder Linkstranslat, $k = g_L a = ag_R$, von eingliedrigen Untergruppen g_L, g_R dargestellt werden. Sind

$$u_L(t) = \exp(t\mathbf{x}_L), \quad u_R(t) = \exp(t\mathbf{x}_R) \quad (1.3)$$

Parameterdarstellungen von g_L bzw. g_R ,

$$X_L = (\mathbf{x}_L) := \{\lambda \mathbf{x}_L / \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}, \quad X_R = (\mathbf{x}_R) := \{\lambda \mathbf{x}_R / \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} \quad (1.4)$$

ihre Bildpunkte in dem zum Vektorraum \mathfrak{g} gehörigen projektiven Raum $P(\mathfrak{g})$, so erhält man eine „G-Geradenabbildung“

$$\gamma: \Gamma \longrightarrow P(\mathfrak{g}) \times P(\mathfrak{g}); \quad k \longmapsto (X_L, X_R), \quad (1.5)$$

die jeder G-Geraden k ein vom Anfangspunkt $a \in k$ unabhängiges Punktepaar X_L, X_R in $P(\mathfrak{g})$ zuordnet. Die r -gliedrige Gruppe G wirkt als eine „Bewegungsgruppe“ linearer Transformationen auf \mathfrak{g} bzw. $P(\mathfrak{g})$ in der „adjungierten“ (i. allg. nicht treuen) Darstellung $\text{ad}G$:

$$\text{ad } a: \mathbf{x} \longmapsto a^{-1} \mathbf{x} a \quad (a \in G). \quad (1.6)$$

Insbesondere läßt sich eine G-Gerade $k \in \Gamma$ mit $\gamma(k) = (X_L, X_R)$ deuten als Ort von Bewegungen, die den linken Bildpunkt von k in ihren rechten überführen:

$$\mathbf{x}_R = \text{ad } a (\mathbf{x}_L) = a^{-1} \mathbf{x}_L a \quad (a \in k) \quad (1.7)$$

Im Beispiel von BLASCHKE und GRÜNWARDL entspricht $P(\mathfrak{g})$ der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene E und $\text{ad}G$ der euklidischen Bewegungsgruppe G_E . Die Gruppe G selbst wird man i. allg. nicht in einen r -dimensionalen projektiven Raum einbetten können; ihr entspricht im Beispiel von BLASCHKE/GRÜNWARDL der quasielliptische Raum. Trotzdem kann man die Analogie zur ebenen Kinematik weiterverfolgen: Eine differenzierbare Kurve $A: t \in I \longrightarrow a(t) \in G$ (I ein reelles Intervall) induziert in $P(\mathfrak{g})$ einen „Zwangslauf“

$$\text{ad } a(t): P(\mathfrak{g}) \longrightarrow \hat{P}(\mathfrak{g}) \quad (t \in I) \quad (1.8)$$

eines „Gangraumes“ $P(\mathfrak{g})$ gegenüber einem „Rastraum“ $\hat{P}(\mathfrak{g})$. Analog zur ebenen euklidischen Kinematik nennen wir ein durch $\text{ad } a(t_0)$ aufeinanderbezogenes Punktepaar $X = (\mathbf{x}) \in P(\mathfrak{g}), \hat{X} = (\hat{\mathbf{x}}) \in \hat{P}(\mathfrak{g})$,

$$\hat{\mathbf{x}} = a^{-1}(t_0) \mathbf{x} a(t_0), \quad (1.9)$$

ein Gangpol-Rastpolpaar a.d. Stelle t_0 , wenn die „Führungsgeschwindigkeit“

$$(d\hat{\mathbf{x}}/dt)_t(t) := (a^{-1})' \cdot \mathbf{x} a(t) + a^{-1}(t) \mathbf{x} \dot{a}(t) \quad (1.10)$$

von X a.d. Stelle t_0 verschwindet. ($\dot{a}(t)$ bezeichne die Ableitung der Matrixfunktion $a(t)$). Ist $X(t), \hat{X}(t)$ ein differenzierbar von $t \in I$ abhängiges Gangpolrastpolpaar, so durchlaufen Gang- und Rastpol i. allg. je eine Kurve im Gang- und Rastraum, die man als Gang- und Rastpolkurve bezeichnet; (i. allg. gibt es mehrere solcher Pol-

kurven). Ein solches Polkurvenpaar ist durch $\text{ad } a(t)$ nicht nur punktweise (vgl. (1.9)), sondern auch tangentialweise aufeinander bezogen, da aus $(dx/dt)_t = 0$ folgt

$$\hat{x}(t) = \text{ad } a(t) x'(t). \quad (1.11)$$

Die G-Gradenabbildung (1.5) liefert nun folgendes für die Kinematik in $P(g)$ fundamentales Lemma:

Lemma 1: *Berührt die G-Gerade k_{t_0} die Kurve $a(t)$ in G an der Stelle t_0 , so liefert das „Tangentenbild“ $\gamma(k_{t_0}) = (X_L(t_0), X_R(t_0))$ ein Gangpol-Rastpolpaar des Zwanglaufs $\text{ad } a(t): P(g) \rightarrow \hat{P}(g)$ an der Stelle t_0 . Jedes weitere Gangpol-Rastpolpaar $X = (x) \in P(g)$, $\hat{X} = (\hat{x}) \in \hat{P}(g)$ an der Stelle t_0 ist durch das Verschwinden der Lieprodukte*

$$[x_L, x] = x_L x - x x_L = 0, [x_R, \hat{x}] = x_R \hat{x} - \hat{x} x_R = 0 \quad (1.12)$$

gegeben.¹⁾

Beweis: Soll die G-Gerade $k_{t_0}: x(s) = \exp(sx_L) a(t_0) \exp(sx_R)$ ($s \in \mathbb{R}$) die Kurve $a(t)$ an der Stelle t_0 berühren, $x'(0) = \dot{a}(t_0)$, so folgt für ihre γ -Bilder

$$x_L = \dot{a}(t_0) a^{-1}(t_0), x_R = a^{-1}(t_0) \dot{a}(t_0). \quad (1.13)$$

Ableiten von x_R ergibt wegen $(a^{-1})' = -a^{-1}\dot{a}a^{-1}$, daß $(dx_R/dt)_t(t_0) = 0$ gilt, d. h. $X_L = (x_L), X_R = (x_R)$ ist Gangpol-Rastpolpaar. Die Gleichungen (1.12) sind dann lediglich Umformungen der Polbildung $(d\hat{x}/dt)_t(t_0) = 0$ für ein allgemeines Gangpol-Rastpolpaar X, \hat{X} mit Hilfe von (1.13).

In dieser Note interessieren besonders solche Fälle, wo das Tangentenbild $\gamma(k_i)$ einer Kurve a in G das einzige Gangpol-Rastpolpaar des Zwanglaufs (1.8) liefert.

2. Kinematische Räume und Geradenabbildungen

Es ist zu erwarten, daß die kinematische Geradenabbildung geometrisch besonders durchsichtig wird, wenn eine Liegruppe G vorliegt, die einen projektiven Raum teilweise ausfüllt, wobei die G-Geraden auf projektiven Geraden liegen. Dies führt auf das Konzept des kinematischen Raumes nach L. BRÖCKER [8], dem wir uns – unter Beschränkung auf \mathbb{R} als Grundkörper – im wesentlichen anschließen.

P sei ein n -dimensionaler reeller projektiver Raum ($n \geq 3$) und G eine (Lie'sche) Gruppe, die P bis auf eine Menge $S = P - G$ von „singulären Punkten“ ausfüllt; die Punkte von G nennen wir *regulär*. Das Paar (P, G) heiße ein *kinematischer Raum*, wenn gilt:

- (KR1) Die Multiplikation in G kann auf Produkte AX, XA ($A \in G, X \in P$) erweitert werden, derart, daß die Abbildungen $X \mapsto AX, X \mapsto XA$ Kollineationen von P sind.
- (KR2) Ist g eine beliebige Gerade von P durch den Einspunkt I von G , so ist $g \cap G$ Untergruppe von G .
- (KR3) Jede Gerade $g \notin S$ trifft S in höchstens endlich vielen Punkten.

Im Beispiel von BLASCHKE/GRÜNWALD besteht S aus den Punkten der Gerade

¹⁾ Lemma 1 verallgemeinert den entsprechenden Satz 29 in MÜLLER [20], S. 81.

Wegen (KR2) bezeichnen wir die Kollineationen in (KR1) als *linke* und *rechte Schiebungen*.

Lemma 2: *Das Invertieren in \mathbf{G} erzeugt eine involutorische Kollineation $j = \text{id}_{\mathbf{P}}$ von \mathbf{P} , die neben I noch genau eine nicht durch I gehende Hyperebene \mathbf{H} punktweise fest läßt.*

Beweis: $A \mapsto A^{-1} (A \in \mathbf{G})$ ist wegen (KR1), (KR2) eine involutorische Kollineation in \mathbf{G} , die sich wegen (KR3) zu einer involutorischen Kollineation von \mathbf{P} fortsetzen läßt. $j \neq \text{id}_{\mathbf{P}}$, da \mathbf{G} Liegruppe ist. Auf einer Geraden g durch I läßt j neben I noch genau einen weiteren Punkt fest, also läßt j noch genau eine Hyperebene $\mathbf{H} \neq I$ punktweise fest.

Offensichtlich übernimmt \mathbf{H} die Rolle des projektiven $(n-1)$ -dimensionalen Raumes $\mathbf{P}(\mathbf{g})$ zur Liealgebra \mathbf{g} von \mathbf{G} , da mit Lemma 2 die Gruppe \mathbf{G} in der adjungierten Darstellung $\text{ad}\mathbf{G}$,

$$\text{ad}A(X) := A^{-1}XA \quad (A \in \mathbf{G}) \quad (2.1)$$

die Hyperebene \mathbf{H} in sich überführt. $\text{ad}\mathbf{G}$ bezeichnen wir als „Bewegungsgruppe“ von \mathbf{H} . Die zugehörige kinematische Geradenabbildung definieren wir für alle Geraden $g \not\subseteq \mathbf{P}$ von \mathbf{P} durch

$$\begin{aligned} \gamma: g &\mapsto (X_L, X_R) \in \mathbf{H} \times \mathbf{H} \text{ mit} \\ X_L &:= gA^{-1} \cap \mathbf{H}, X_R := A^{-1}g \cap \mathbf{H} \quad (A \in g \cap \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

γ ist von der Wahl des regulären Punktes $A \in g$ unabhängig, da wegen (KR2) $gA^{-1} \cap \mathbf{G}$, $A^{-1}g \cap \mathbf{G}$ Untergruppen sind.

3. Algebraisierung

Unter einer Algebra verstehen wir hier einen $(n+1)$ -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum \mathbf{A} mit einem \mathbb{R} -bilinearen assoziativen Produkt $a, b \in \mathbf{A} \mapsto ab \in \mathbf{A}$. \mathbf{A} besitze eine Eins e , die man mit $1 \in \mathbb{R}$ identifizieren kann. \mathbf{E} sei die Gruppe der Einheiten (also der invertierbaren Elemente) von \mathbf{A} . BRÖCKER [8] hat gezeigt, daß es zu jedem kinematischen Raum (\mathbf{P}, \mathbf{G}) (auch über beliebigem Grundkörper K) bis auf Isoerphie genau eine K -Algebra \mathbf{A} gibt mit

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{G} = \mathbf{P}(\mathbf{E})^2 \quad (3.1)$$

Bei LÜBBERT [17] wurde gezeigt, daß (für $K = \mathbb{R}$) die zu (\mathbf{P}, \mathbf{G}) gehörige Algebra \mathbf{A} eine kinematische Algebra im Sinne von KARZEL [15] ist. Eine Algebra \mathbf{A} heiße *kinematisch*³⁾, wenn \mathbf{A} einen involutorischen Antiautomorphismus

$$\varphi \neq \text{id} : x \mapsto \bar{x} \quad (\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}, x = \bar{\bar{x}}) \text{ gestattet mit } x = \bar{x} \text{ genau für } x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

²⁾ Ist T Teilmenge des Vektorraumes \mathbf{A} , so bezeichne $\mathbf{P}(T)$ die Punktmenge $\{(x) \in \mathbf{P} / x \in T - \{0\}\}$ in dem zu \mathbf{A} gehörigen Projektiven Raum $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

³⁾ KARZEL [15] hat eine andere (mit (3.2) gleichwertige) Definition angegeben.

Der Antiautomorphismus φ bestimmt auf \mathbf{A} eine symmetrische Bilinearform („Metrik“)

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} (x\bar{y} + y\bar{x}) \in \mathbb{R} \quad (x, y \in \mathbf{A}), \quad (3.3)$$

die zur Klassifizierung der kinematischen Räume und entsprechenden Geradenabbildungen dienen wird. Dazu gehört die „Norm“

$$N(x) := \langle x, x \rangle = x\bar{x} \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbf{A}) \quad (3.4)$$

mit den Eigenschaften

$$N(1) = 1, \quad N(xy) = N(x)N(y), \quad N(\bar{x}) = N(x). \quad (3.5)$$

Die Gruppe \mathbf{E} der Einheiten von \mathbf{A} ist durch

$$x \in \mathbf{E} \Leftrightarrow N(x) \neq 0 \quad \text{mit} \quad x^{-1} = N(x)^{-1} \bar{x} \quad (3.6)$$

gekennzeichnet. Die Menge der Nullteiler bildet wegen (3.6) einen quadratischen Kegel in \mathbf{A} mit der Gleichung $N(x) = 0$. Nennen wir zwei Vektoren $x, y \in \mathbf{A}$ orthogonal ($x \perp y$), wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt, so gestattet \mathbf{A} die orthogonale Zerlegung

$$\mathbf{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} := \{x \in \mathbf{A} / \langle 1, x \rangle = 0\} \quad (3.7)$$

Jedes $x \in \mathbf{A}$ läßt sich dann eindeutig in der Form

$$x = \xi + \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \xi - \mathbf{x} \quad (\xi \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{V}) \quad (3.8)$$

schreiben. Mit (3.8) erhält man die nützlichen Kriterien

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{x} = x, \quad x \in \mathbf{V} \Leftrightarrow \bar{x} = -x \quad (3.9)$$

Ist \mathbf{A} kinematische Algebra des kinematischen Raumes $\mathbf{P} = P(\mathbf{A})$, $\mathbf{G} = P(\mathbf{E})$, so sind $X = (x) = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\} \quad (x \in \mathbf{A} - \{0\})$ die Punkte in \mathbf{P} , $I = (1)$ der Einspunkt, und das Produkt ist über $XY := (xy)$ (für $xy \neq 0$) definiert. (KR1) ist wegen der Bilinearität des Produktes in \mathbf{A} erfüllt. (KR3) gilt, weil die Menge der singulären Punkte,

$$\mathbf{S} = \{X = (x) / x \neq 0, N(x) = 0\} \quad (3.10)$$

eine (eventuell nullteilige oder ausgeartete) *Hyperquadrik* des projektiven Raumes darstellt. Die Gültigkeit von (KR2) ergibt sich so: Für $x \in \mathbf{V}$ gilt nach (3.4), (3.9)

$$N(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^2. \quad (3.11)$$

Daher schreibt sich das Quadrat jedes Vektors $x = \xi + \mathbf{x}$ in der Form

$$x^2 = -(\xi^2 + N(\mathbf{x})) + 2\xi x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x. \quad (3.12)$$

Der Teilraum $T_x := \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ ist also Teilalgebra von \mathbf{A}^4 und daher $P(T_x)$ (für $x \neq 0$) eine Gerade durch I , deren Durchschnitt mit \mathbf{G} eine Untergruppe von \mathbf{G} ist. Wegen (3.7), (3.9) entspricht φ der Involution j , $P(\mathbf{V})$ der Hyperebene \mathbf{H} aus Lemma 2.

⁴⁾ Durch diese Eigenschaft hat KARZEL [15] die kinematischen Algebren definiert, wobei statt \mathbb{R} ein beliebiger Grundkörper K steht.

Schließlich kann \mathbf{V} mit dem Vektorraum \mathfrak{g} der Liealgebra von \mathbf{G} identifiziert werden, denn ist $A(t)$ (t reeller Parameter) eine differenzierbare Kurve in \mathbf{G} durch den Einspunkt $I = A(0)$, so kann man in der Umgebung von I die Kurve $A(t)$ durch eine genormte Vektorfunktion $\mathbf{a}(t) \in \mathfrak{E}$ ($\mathbf{a}(0) = 1$, $N(\mathbf{a}) = 1$) darstellen. Das Lieelement (Tangentenvektor an A bei $t=0$), $\mathbf{a} = (da/dt)(0) = \dot{\mathbf{a}}(0)$, ist ein Vektor in \mathbf{V} , da aus $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 1$ folgt: $\langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}} \rangle = 0$, also für $t=0$: $\langle 1, \mathbf{a} \rangle = 0$. (Das Lieprodukt in \mathbf{V} , $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \mathbf{x}\mathbf{y} - \mathbf{y}\mathbf{x}$, erfüllt, wie man leicht bestätigt, die Jacobi-Identität).

Somit kann man eine Gerade $g \subset \mathbf{P}$ durch I in einer Umgebung von I durch die Vektorfunktion

$$g: \exp(\mathbf{t}\mathbf{x}) = 1 + \mathbf{t}\mathbf{x} + \frac{1}{2!} \mathbf{t}^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{t}^3 \mathbf{x}^3 + \dots \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R}) \quad (3.13)$$

in \mathbf{A} darstellen. Hierbei ist $X = (\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \neq 0$) der Durchstoßpunkt von g durch die Hyperebene \mathbf{H} , also mit (2.2):

$$\gamma(g) = (X, X). \quad (3.14)$$

Für eine analytische Beschreibung der kinematischen Geradenabbildungen γ ist es nützlich, zu jedem $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ die reellen Funktionen $t \rightarrow \text{Co}(\mathbf{t}\mathbf{x})$, $t \rightarrow \text{Si}(\mathbf{t}\mathbf{x})$ über

$$\begin{aligned} \text{Co}(\mathbf{t}\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2} (\exp(\mathbf{t}\mathbf{x}) + \exp(-\mathbf{t}\mathbf{x})) \\ \mathbf{x} \text{ Si}(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2} (\exp(\mathbf{t}\mathbf{x}) - \exp(-\mathbf{t}\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (3.15)$$

einzuführen. Da man für die Parameterdarstellung (3.13) einer eingliedrigen Untergruppe von \mathbf{G} durch Parametertransformation $t \rightarrow ct$ ($c \in \mathbb{R} - \{0\}$) stets

$$N(\mathbf{x}) \in \{-1, 0, +1\} \quad (3.16)$$

erreichen kann, interessieren nur die „Normalformen“⁵⁾

$$\text{Co}(\mathbf{t}\mathbf{x}) = \begin{cases} \cosh t \\ 1 \\ \cosh t \end{cases}, \quad \text{Si}(\mathbf{t}\mathbf{x}) = \begin{cases} \sinh t \\ t \\ \sinh t \end{cases} \quad \text{für } N(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}, \quad (3.16)$$

wobei rechts jeweils die üblichen trigonometrischen bzw. Hyperbelfunktionen stehen.

Entsprechend besitzt nun eine allgemeine Gerade $h \not\subset \mathbf{S}$ von \mathbf{P} in der Umgebung eines ihrer Punkte $A_0 = (a_0) \in \mathbf{G}$ die simultanen Parameterdarstellungen

$$\text{mit} \quad h: \mathbf{a}(t) = a_0 \exp(\mathbf{t}\mathbf{x}_L) = \exp(\mathbf{t}\mathbf{x}_R) a_0 \quad (\mathbf{t} \in \mathbb{R}) \quad (3.17)$$

$$\gamma(h) = (X_L, X_R), \quad X_L = (\mathbf{x}_L), \quad X_R = (\mathbf{x}_R) \quad (3.18)$$

Den drei Normalformen (3.16) entspricht die Sprechweise: „ h ist *elliptisch*, *parabolisch*, *hyperbolisch*“ je nachdem $N(\mathbf{x}_L) = N(\mathbf{x}_R) = +1$, 0 oder -1 ist, d. h. je nachdem h die Hyperquadrik \mathbf{S} in *keinem*, *einem* oder *zwei* Punkten trifft.

⁵⁾ Für Dimension $n = 3$ vgl. auch die trigonometrischen Funktionen „dualer“ Winkel bei der Quaternionendarstellung räumlicher euklidischer Bewegungen, BLASCHKE [5], S. 45.

Zur Ermittlung der Geradenbilder in \mathbf{H} dient

Satz 1: Führt man in \mathbf{A} die bilinearen alternierenden Produkte

$$a \hat{L} b = \frac{1}{2} (b\bar{a} - a\bar{b}), \quad a \hat{R} b = -\frac{1}{2} (\bar{b}a - \bar{a}b) \quad (3.19)$$

ein, so ergeben sich für eine Gerade $h \notin \mathbf{S}$ von \mathbf{P} die Bildpunkte aus $\gamma(h)$ zu

$$X_L = (a \hat{L} b), \quad X_R = (a \hat{R} b), \quad (3.20)$$

wobei $A = (a)$, $B = (b)$ zwei beliebige verschiedene Punkte von h sind⁶⁾.

Beweis: h sei in der Umgebung eines regulären Punktes $(a_0) \in h$ gemäß (3.17) parametrisiert. Mit $a = a(t_1)$, $b = a(t_2)$ folgt aus (3.19), (3.15):

$$a \hat{L} b = N(a_0) \operatorname{Si}((t_2 - t_1) \mathbf{x}_L) \mathbf{x}_L, \quad a \hat{R} b = N(a_0) \operatorname{Si}((t_2 - t_1) \mathbf{x}_R) \mathbf{x}_R.$$

4. Klassifikation der Kinematischen Räume und Geradenabbildungen

Zur Klassifikation bedienen wir uns des Ausartungsgrades der Metrik \langle, \rangle , d. h. der Dimension des Radikals

$$\operatorname{Rad} \mathbf{A} = \{x \in \mathbf{A} / \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbf{A}\} \subset \mathbf{V}. \quad (4.1)$$

Es sei $\dim \mathbf{A} = n+1$, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{P} = n \geq 3$. Wir unterscheiden drei Haupttypen:

- (I) $\dim \operatorname{Rad} \mathbf{A} \leq n-2$: (\mathbf{P}, \mathbf{G}) heiße *regulär*⁷⁾
- (II) $\dim \operatorname{Rad} \mathbf{A} = n-1$: (\mathbf{P}, \mathbf{G}) heiße *geschlitzt*⁷⁾
- (III) $\dim \operatorname{Rad} \mathbf{A} = n$: (\mathbf{P}, \mathbf{G}) heiße *ausgeartet*.

Zunächst einige Bezeichnungen und Lemmata: Durch die Hyperquadrik \mathbf{S} ist in \mathbf{P} eine (i. allg. ausgeartete) Polarität gegeben. Ist T Teilraum von \mathbf{P} , so besteht der zu T polare Raum T^\perp aus den Punkten (x) mit $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $(y) \in T$; speziell ist $\mathbf{P}^\perp = \operatorname{Rad} \mathbf{P} = \operatorname{P}(\operatorname{Rad} \mathbf{A})$ das „Radikal von \mathbf{P} “. Zu einem Punkt $X \notin \operatorname{Rad} \mathbf{P}$ gehört die *Polarhyperebene*

$$X^\perp = \mathbf{H}X = X\mathbf{H}, \quad (4.2)$$

wobei \mathbf{H} die Polarhyperebene des Einspunktes I ist. Ist g eine $\operatorname{Rad} \mathbf{P}$ nichttreffende Gerade durch die Punkte $A \neq B$, so ist ihre *Polare*

$$g^\perp = \mathbf{H}A \cap \mathbf{H}B = A\mathbf{H} \cap B\mathbf{H} \quad (4.3)$$

ein $(n-2)$ -dimensionaler Teilraum von \mathbf{P} . Für eine Gerade $g \notin \mathbf{S}$ mit $\gamma(g) = (X_L, X_R)$ heiße die Menge

⁶⁾ Sind speziell $A, B \in h$ reguläre Punkte mit $\langle a, b \rangle = 0$, so folgt $X_L = BA^{-1}$, $X_R = A^{-1}B$. Auf diese Weise haben BLASCHKE und MÜLLER [5, 6, 20] die Geradenabbildung aus dem elliptischen bzw. quasielliptischen 3-dimensionalen Raum mit Hilfe einer geeigneten Quaternionenalgebra erklärt.

⁷⁾ Den Typen (I)–(III) entsprechen bei BRÖCKER [8] im wesentlichen die „ordinären“, „singulären“ und „ausgearteten“ kinematischen Räume. $\operatorname{Rad} \mathbf{A}$ wurde dort jedoch nicht zur Einteilung verwendet.

$$Z(g) := \{A \in G \mid AX_R = X_L A\} \quad (4.4)$$

der Zentralisator von g ; $\text{ad}Z(g)$ besteht aus allen Bewegungen, die X_L nach X_R bringen.

Lemma 3: *Ist $g \notin S$ eine nichtparabolische Gerade von P , so besteht ihr Zentralisator genau aus den regulären Punkten von g und ihrer Polaren*

$$Z(g) = (g \cup g^\perp) \cap G \quad (4.5)$$

Beweis: Mit einem beliebigen $B \in g \cap G$ und $g_L := gB^{-1}$ gilt $Z(g)B^{-1} = Z(g_L)$. Wegen (2.2) ist $g_L \cap H = X_L$ der linke Bildpunkt von g . Da g nicht parabolisch ist, folgt, daß X_L regulär ist. Setzen wir $X_L = (x)$, so ergeben sich die Punkte $Y = (y)$ von $Z(g_L)$ aus der Bedingung

$$x y = \mu y x \quad (\mu \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (4.6)$$

Aus $0 \neq N(xy) = N(yx)$ folgt $\mu = \pm 1$. Eine leichte Rechnung, die (3.9) berücksichtigt, ergibt: $\mu = +1 \Leftrightarrow Y \in g_L$, $\mu = -1 \Leftrightarrow Y \in g_L^\perp$. Daraus folgt (4.5).

Lemma 3 besagt insbesondere, daß $\gamma(g) = \gamma(h)$ gilt genau für alle Geraden $h \notin S$ im Polarraum von g .

4.1) Reguläre kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

Satz 2: *Ein regulärer kinematischer Raum (P, G) ($\dim P = n \geq 3$) ist notwendig dreidimensional und ohne Radikal ($\text{Rad} P = \emptyset$).⁸⁾*

Beweis: Wir zeigen, daß die Polare h^\perp einer Gerade $h \subset P$ eindimensional ist: Wegen $\dim \text{Rad} A \leq n-2$ gibt es in V zwei orthogonale Einheiten a, b . Aus $-2 \langle a, b \rangle = ab + ba = 0$ folgt, daß auch $c := ab$ eine zu a und b orthogonale Einheit in V ist. Für die Punkte $A = (a)$, $B = (b)$, $C = (c) \in H$ gilt

$$C = AB = BA. \quad (*)$$

Die Gerade $h \subset H$ durch die regulären Punkte A, B ist nicht parabolisch, ihre Polare $h^\perp = HA \cap HB$ enthält die Gerade g durch I und C . Für einen beliebigen Punkt $Y \in h^\perp - H$ gilt daher $YA = AY$, $YB = BY$, also $YC = CY$ wegen (*). Nach (4.4) und Lemma 3 ist also Y im Zentralisator $Z(g) = (g \cup g^\perp) \cap G$ enthalten; wegen $Y \notin H$, $g^\perp \subset H$ folgt $Y \in g$ und damit: $g = h^\perp$, $n = 3$, $\dim \text{Rad} A \geq 1$. Da nun $\dim V = 3$ ist, V aber drei paarweise orthogonale Einheiten enthält, muß $\dim \text{Rad} A = 0$ sein.

Folgerung 1: *Die beiden einzigen regulären kinematischen Räume sind (a) der elliptische Raum EI^3 mit nullteiliger Quadrik $S = \emptyset$ und den Quaternionen als kinematischer Algebra, $\text{ad}G$ ist Bewegungsgruppe der elliptischen Ebene H (bzw. der euklidischen Einheitssphäre), (b) der indefinit-elliptische⁹⁾ Raum HI^3 mit einschaligem*

⁸⁾ Vgl. auch BRÖCKER [8], S. 260 f.

⁹⁾ Die Bezeichnung stammt von STRUBECKER [26]. SCHRÖDER [23] nennt diesen kinematischen Raum hyperbolisch.

Hyperboloid \mathbf{S} und kinematischer Algebra, die zum Ring $L(2, \mathbb{R})$ aller zweireihigen Matrizen isomorph ist, $\text{ad}\mathbf{G}$ ist Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene \mathbf{H} mit $\mathbf{S} \cap \mathbf{H}$ als absolutem Kreis.

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 2 hat \mathbf{V} eine Basis $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{c} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ aus paarweise orthogonalen Einheiten, die wir o.B.d.A. als normiert annehmen können, $N(\mathbf{e}_1) = \alpha_1 = \pm 1$, $N(\mathbf{e}_2) = \alpha_2 = \pm 1$, $N(\mathbf{e}_3) = \alpha_1\alpha_2$.

Bei gegebenen α_1, α_2 ist \mathbf{A} durch die Multiplikationstafel

$$\begin{aligned} 1\mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_i, 1 = \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1^2 = -\alpha_1, \mathbf{e}_2^2 = -\alpha_2, \mathbf{e}_3^2 = -\alpha_1\alpha_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bestimmt. Für $\mathbf{x} = \xi_0 + \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3$ ergibt sich die Norm

$$N(\mathbf{x}) = \xi_0^2 + \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \alpha_1\alpha_2\xi_3^2. \quad (4.6)$$

(a) Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ist \mathbf{A} der Schiefkörper der (reellen) Quaternionen, und die Gleichung $N(\mathbf{x}) = 0$ ergibt eine nullteilige Quadrik \mathbf{S} .

(b) Für $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ ist \mathbf{A} zur Algebra $L(2, \mathbb{R})$ isomorph¹⁰⁾ und die Gleichung $N(\mathbf{x}) = 0$ bestimmt in \mathbf{P} ein einschaliges Hyperboloid \mathbf{S} . Die beiden noch möglichen Fälle $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ oder $\alpha_1 = -\alpha_2 = -1$ führen (bis auf Isomorphie) auf dasselbe Ergebnis.

Lemma 3 und Satz 2 ergeben für die kinematische Geradenabbildung:

Folgerung 2: Gilt $(X_L, X_R) = \gamma(g)$ für zwei reguläre Punkte $X_L, X_R \in \mathbf{H}$, so hat (X_L, X_R) genau die zwei zueinander polaren Urbildgeraden g, g^\perp . Im Fall des \mathbf{El}^3 ist jedes Punktepaar von \mathbf{H} ein γ -Bild, im Fall des \mathbf{Hl}^3 genau dann, wenn beide Punkte entweder im Äußeren oder im Inneren des absoluten Kreises $\mathbf{H} \cap \mathbf{S}$ oder auf $\mathbf{H} \cap \mathbf{S}$ liegen. Gilt $X_L, X_R \in \mathbf{H} \cap \mathbf{S}$, so gibt es dazu unendlich viele parabolische Urbildgeraden.

Anmerkung: Orientiert man die Geraden von \mathbf{El}^3 oder \mathbf{Hl}^3 durch eine Parameterdarstellung (3.17), so kann man die Geradenabbildung für nichtparabolische Geraden umkehrbar machen, indem man jeder orientierten Geraden \vec{g} das normierte Vektorpaar $(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R)$ zuordnet und die Orientierung \vec{g}^\perp auf der Polaren g^\perp so festlegt, daß sie das Bild $(\mathbf{x}_L, -\mathbf{x}_R)$ erhält. Auf diese Weise haben BLASCHKE und MÜLLER [5], [20] im Fall des \mathbf{El}^3 die Geometrie der Raumkurven und Regelflächen des \mathbf{El}^3 mit der Kinematik der euklidischen Einheitssphäre in Verbindung gebracht¹¹⁾.

Eine konstruktive Beschreibung der kinematischen Geradenabbildung aus dem \mathbf{Hl}^3 stammt von ECKHART [9] und REHBOCK [21] (Abb. 1): Eine Gerade $g \subset \mathbf{P}^3$ treffe das Hyperboloid \mathbf{S} in zwei Punkten S_1, S_2 . Die beiden Erzeugenden durch S_1 und S_2 aus der ersten Regelschar von \mathbf{S} treffen die Ebene \mathbf{H} in zwei Punkten, deren Verbindung mit h_1 bezeichnet sei. Der linke Bildpunkt X_1 von g ist dann der Pol von

¹⁰⁾ Vgl. BACHMANN [1], S. 180 f.

¹¹⁾ Vgl. auch LÜBBERT [16, 18].

h_I bez. des Kreises $H \cap S$. Entsprechend bekommt man den rechten Bildpunkt X_{II} mit Hilfe der durch S_1, S_2 gehenden Erzeugenden aus der zweiten Regelschar von S .

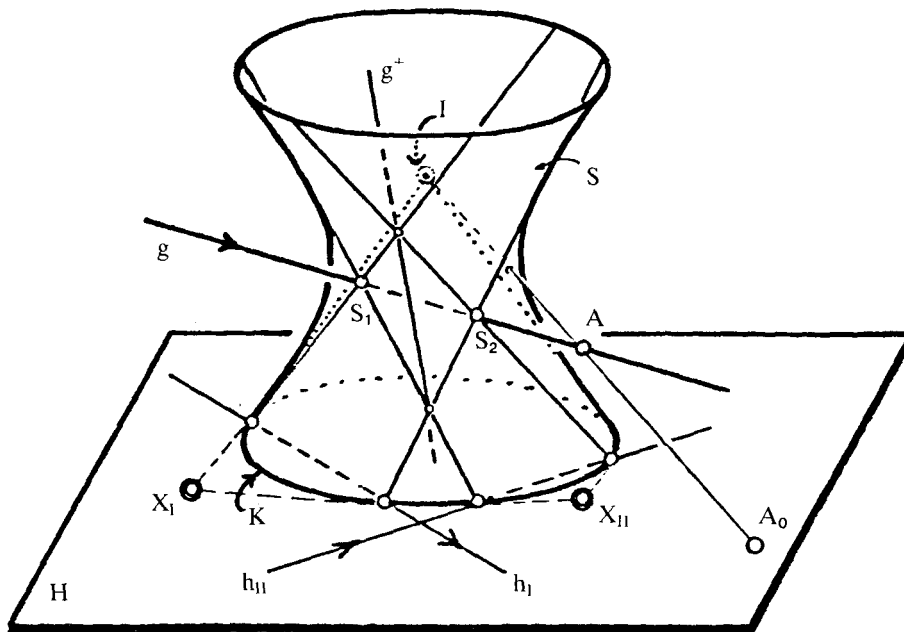


Abb. 1:
Die ECKHART-REHBOCK'sche Geradenabbildung

In [28] hat WUNDERLICH die ECKHART-REHBOCK'sche Geradenabbildung mit dem STUDY'schen Übertragungsprinzip in Verbindung gebracht.

4.II) Geschlitzte kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

Bei geschlitzten kinematischen Räumen ist das $(n-2)$ -dimensionale Radikal $g_\infty := \text{Rad } P$ offensichtlich Polarraum jeder nicht parabolischen Geraden g aus P . Aus Lemma 3 folgt damit:

Satz 3: Die kinematische Geradenabbildung aus einem geschlitzten kinematischen Raum ist injektiv für den Bereich aller nicht-parabolischen (d.h. g_∞ nicht treffenden) Geraden.

In einer geeigneten Basis $1, e_1, \dots, e_n$ von A lautet die Norm

$$N(x) = \xi_0^2 + \alpha \xi_1^2, \quad \alpha \in \{-1, +1\} \quad (4.7)$$

Im Fall $\alpha = +1$ fällt S mit g_∞ zusammen. (P, G) heiße verallgemeinerter quasielliptischer Raum QEI^n , da für $n=3$ sich der quasielliptische Raum von BLASCHKE

[3, 6] ergibt. Im Fall $\alpha = -1$ entartet \mathbf{S} zu einem Paar von Hyperebenen H_+, H_- , die von \mathbf{H} verschieden sind. (\mathbf{P}, \mathbf{G}) heiße mit BRÖCKER [8] *Minkowskischer Raum*.

Satz 4: (a) *Die Dimension eines verallgemeinerten quasielliptischen Raumes ist ungerade, und es gibt (bis auf Isomorphie) zu jedem $n = 2m + 1$ genau einen \mathbf{QEI}^n .*

(b) *Minkowskische Räume gibt es zu jeder Dimension n , und zu jeder Aufspaltung von n in der Form*

$$n = 2m + 1 + s \quad (m \geq 0, s \geq 0, \text{ ganz}) \quad (4.8)$$

gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen Minkowskischen Raum.

Die **Beweise** seien nur angedeutet¹²⁾: (a) für einen \mathbf{QEI}^n ist $\alpha = +1$ in (4.7), daher gibt es ein $e_1 \in \mathbf{V}$ mit $-e_1^2 = N(e_1) = +1$; es folgt, daß e_2 und $e_3 := e_1 e_2$ linear unabhängig sind für beliebiges $e_2 \in \text{Rad } \mathbf{A} - \{0\}$, $U_1 := \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3$ ist Ideal in \mathbf{A} . Nehmen wir an, wir hätten auf diese Weise maximal m Ideale $U_k = \mathbb{R}e_{2k} + \mathbb{R}e_{2k+1}$ gefunden, so daß $W := U_1 + \dots + U_m$ direkte Summe ist, so bekommt man für $\mathbb{R}e_1 + W$ die Produkttafel

$$\begin{aligned} e_1^2 &= -1, \quad e_1 e_{2k} = -e_{2k} e_1 = e_{2k+1}, \quad e_1 e_{2k+1} = -e_{2k+1} e_1 = -e_{2k} \\ (k &= 1, \dots, m), \quad e_i e_j = 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit folgt

$$e_1 W = W e_1, \quad x W = W x = \{0\} \quad \forall x \in \text{Rad } \mathbf{A} \quad (4.10)$$

Gäbe es ein $x \in \text{Rad } \mathbf{A} - W$, so wäre $W + U$ mit $U := \mathbb{R}x + \mathbb{R}e_1 x$ direkte Summe, im Widerspruch zur Maximalität von m . Also ist $W = \text{Rad } \mathbf{A}$, $\dim \mathbf{V} = 2m + 1$. Durch (4.9) ist die kinematische Algebra von \mathbf{QEI}^n bis auf Isomorphie bestimmt.

(b) hnlich findet man zu einem n -dimensionalen Minkowskiraum mit jeder Aufspaltung (4.8) in einer geeigneten Basis $1, e_1, \dots, e_{2m+1}, \dots, e_n$ die Produkttafel

$$\begin{aligned} e_1^2 &= +1, \quad e_1 e_{2k} = -e_{2k} e_1 = e_{2k+1}, \quad e_1 e_{2k+1} = -e_{2k+1} e_1 = e_{2k} \quad (k = 1, \dots, m), \\ e_1 e_{2m+1+r} &= -e_{2m+1+r} e_1 = e_{2m+1+r} \quad (r = 1, \dots, s), \\ e_i e_j &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Im Fall des \mathbf{QEI}^n (n ungerade) ist $\text{ad } \mathbf{G}$ eine Untergruppe euklidischer Bewegungen des affinen Raumes $\mathbf{H} - g_\infty$. Für $n = 3$ ist $\text{ad } \mathbf{G}$ die volle Gruppe der eigentlichen ebenen euklidischen Bewegungen. Die kinematische Geradenabbildung ist die von BLASCHKE und GRÜNWALD her bekannte; ihre konstruktive Beschreibung findet man in [6], [3].

Im Fall eines Minkowskischen Raumes interessieren die Grenzfälle

$$(A) \quad n = 2m + 1 \quad (s = 0) \quad \text{und} \quad (B) \quad n = 1 + s \quad (m = 0).$$

Wir diskutieren sie der Einfachheit halber nur für $n = 3$, wo sie die beiden einzigen Minkowskischen Räume ergeben:

¹²⁾ Ausführlicheres bei LÜBBERT [17].

(A) ($s = 0$): Als Gegenstück zu \mathbf{QEI}^3 erhält man den *indefinit-quasielliptischen*¹³⁾ Raum \mathbf{QHI}^3 ; adG besteht aus pseudoeuklidischen Bewegungen, die in der affinen Ebene $\mathbf{H}-g_\infty$ die Richtungen $n_2 = e_2 + e_3$, $n_3 = e_2 - e_3$ festlassen.

(B) ($m = 0$): Der kinematische Raum heiße Homothetieraum \mathbf{Ht}^3 . adG ist Gruppe der eigentlichen und uneigentlichen Homothetien (Streckungen)¹⁴⁾ der Ebene $\mathbf{H}-g_\infty$.

Die kinematischen Geradenabbildungen von \mathbf{QHI}^3 bzw. \mathbf{Ht}^3 lassen sich ähnlich einfach wie die von \mathbf{QEI}^3 konstruktiv beschreiben¹⁵⁾: Hierzu betrachten wir den affinen Raum $\mathbf{A}^3 = \mathbf{P}-\mathbf{H}_\infty$ mit Fernebene \mathbf{H}_∞ durch \mathbf{I} und g_∞ und in \mathbf{A}^3 die parallelen Ebenen $\mathbf{E} = \mathbf{H}-g_\infty$, $\mathbf{E}_+ = \mathbf{H}_+-g_\infty$, $\mathbf{E}_- = \mathbf{H}_--g_\infty$ ($\mathbf{H}_+ \cup \mathbf{H}_- = \mathbf{S}$). Die Bildpunkte einer (zu \mathbf{E} nicht parallelen) Gerade g sind im Fall des \mathbf{Ht}^3 die Projektionen $X'_+, X'_- \in \mathbf{E}$ aus dem Fernpunkt \mathbf{I} der Schnittpunkte $X_+ = g \cap \mathbf{E}_+$, $X_- = g \cap \mathbf{E}_-$. Ergänzt man nun X'_+, X'_- zu einem Parallelogramm, dessen Seiten parallel zu den absoluten Richtungen

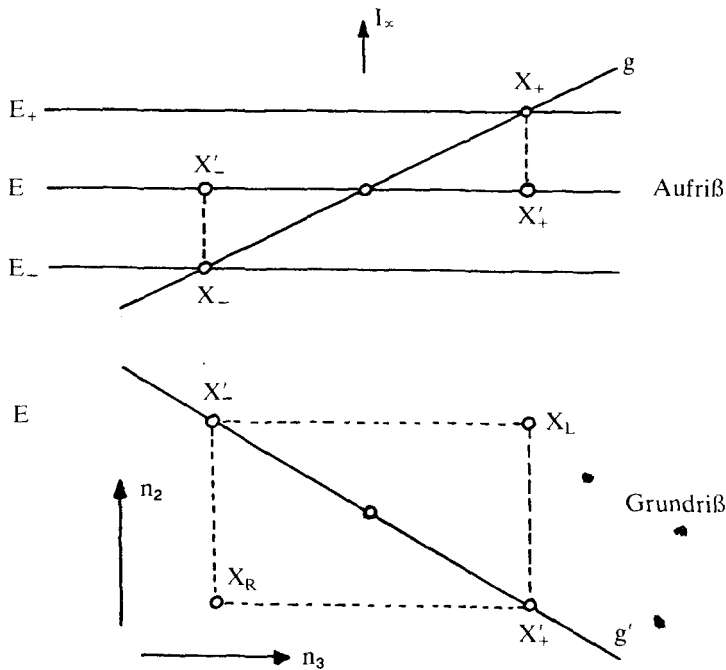


Abb. 2:
Konstruktion der Bildpunkte X'_+, X'_- bzw. X_L, X_R für die Geradenabbildungen des \mathbf{Ht}^3
bzw. des \mathbf{QHI}^3 .

¹³⁾ Die Bezeichnung stammt von STRUBECKER [26].

¹⁴⁾ BRÖCKER [8] zählt (wegen anderer Klassifizierungsmethoden) die Homothetierume (Strecktranslationsrume) nicht zu den Minkowskirumen.

¹⁵⁾ Vgl. hierzu die „parabolischen Risse“ von REHBOCK [22].

$n_2 = e_2 + e_3$, $n_3 = e_2 - e_3$ des \mathbf{QHI}^3 sind, so erhält man in den beiden restlichen Ecken X_L, X_R des Parallelogramms die Bildpunkte zur Geradenabbildung aus dem \mathbf{QHI}^3 (Abb. 2).

4.III) Ausgeartete kinematische Räume und deren Geradenabbildungen

Bei ausgearteten kinematischen Räumen ist $\text{Rad } \mathbf{A} = \mathbf{V}$, damit fallen $\text{Rad } \mathbf{P}, \mathbf{S}$ und \mathbf{H} zusammen; jede Gerade $g \subset \mathbf{P}$ ($g \not\subset \mathbf{S}$) ist parabolisch. Für $a \in \mathbf{A} - \mathbf{V}$, $x \in \mathbf{V}$ berechnet man nach (3.19):

$$a \hat{\wedge} x = a \hat{R} x = x a$$

Damit ergibt sich

Satz 5: *Bei der kinematischen Geradenabbildung eines ausgearteten kinematischen Raumes fallen linker und rechter Bildpunkt einer Geraden $g \not\subset \mathbf{S}$ stets zusammen. Jeder Bildpunkt $X \in \mathbf{H}$ hat unendlich viele Urbildgeraden.*

Zu jeder Dimension gibt es jeweils mehrere nichtisomorphe ausgeartete Räume. Zur Klassifikation kann das Ideal

$$T = \{x \in \mathbf{V} / xy = 0 \forall y \in \mathbf{V}\}$$

dienen; es gilt $\dim T \geq 1$. Ist $\dim T = t$, so heiße (\mathbf{P}, \mathbf{G}) *t-fachisotroper kinematischer Raum*. Betrachten wir die Grenzfälle $t = n$, $t = 1$: Für $t = n$ ist \mathbf{A} kommutativ; die Links- (und Rechts-)Schiebungen in \mathbf{P} sind nichts anderes als die Translationen des affinen Raumes $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} - \mathbf{H}$. (Vgl. BRÖCKER [8]: Translationsrume).

Für $t = 1$ muß die Dimension n ungerade sein; $n = 3$ ergibt den von STRUBECKER [25, 26] her bekannten einfach-isotropen Raum mit T als „vollisotroper Richtung“. Die Transformationen der Form $X \in \mathbf{P} \rightarrow AXB \in \mathbf{P}$ ($A, B \in \mathbf{G}$) bilden die sogen. „Grenzgruppe“.

5. Schlußbemerkung zur Kinematik der Gruppe $\text{ad } \mathbf{G}$

Wie schon aus der Einleitung hervorgeht, gehört zu einer differenzierbaren Kurve $A: t \in J \rightarrow (a(t)) \in \mathbf{G}$ (J reelles Intervall) in einem kinematischen Raum (\mathbf{P}, \mathbf{G}) ein Zwanglauf

$$\text{ad } A(t): \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$$

eines Gangraumes \mathbf{H} gegenüber einem Rastraum $\hat{\mathbf{H}}$ (\mathbf{H} bzw. $\hat{\mathbf{H}}$ ist in \mathbf{P} wieder Polarperebene zum Einspunkt I). Der Zwanglauf heiße regulär, wenn keine der Tangenten an die Kurve A parabolisch ist. (Für ausgeartete kinematische Räume gibt es also keine regulären Zwangläufe). Die zu Beginn gestellte Frage nach der Eindeutigkeit des Gangpol-Rastpolpaares kann nun für nicht ausgeartete kinematische Räume so beantwortet werden:

Satz 6: *Ein regulärer Zwanglauf $\text{ad } A(t): \mathbf{H} \rightarrow \hat{\mathbf{H}}$ besitzt an jeder Stelle t_0 genau ein Gangpol-Rastpolpaar, welches das kinematische Bild der (orientierten) Tangente an die Kurve A im Punkt $A(t_0)$ ist.*

Beweis: Die orientierte Tangente $\vec{g}(t_0)$ der Kurve A an der Stelle t_0 habe das Bild $(\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_R)$; für jedes weitere Gangpol-Rastpolpaar $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ folgt aus (1.12) $\mathbf{x}_L \mathbf{x} = \mathbf{x} \mathbf{x}_L$, $\mathbf{x}_R \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}_R$; da $g(t_0)$ nicht parabolisch ist, folgt hieraus nach Lemma 3: $(\mathbf{x}) \in g(t_0)$ $A^{-1}(t_0)$, $(\hat{\mathbf{x}}) \in A^{-1}(t_0)g(t_0)$ und damit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_L$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_R$.

Literatur

- [1] BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin–Göttingen–Heidelberg, Springer, 1959.
- [2] BLASCHKE, W.: Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschr. Math. Phys. **60** (1911), 61–91, 203–204.
- [3] BLASCHKE, W.: Ebene Kinematik. Hamburger Math. Einzelschr. **25** (1938), Berlin–Leipzig, Teubner.
- [4] BLASCHKE, W.: Nichteuklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Berlin–Leipzig, Teubner 1942.
- [5] BLASCHKE, W.: Kinematik und Quaternionen. Berlin, VEB Deutscher Vlg. der Wiss. 1960.
- [6] BLASCHKE, W. / MÜLLER, H. R.: Ebene Kinematik. München, Oldenbourg 1956.
- [7] BRAUNER, H.: Eine geometrische Kennzeichnung linearer Abbildungen. Monatsh. Math. **77** (1973), 10–20.
- [8] BRÖCKER, L.: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata **1** (1973), 241–278.
- [9] ECKHART, L.: Abbildungsmethoden der darstellenden Geometrie. Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien IIa **132** (1923), 177–192.
- [10] ECKHART, L.: Konstruktive Abbildungsverfahren. Wien, Springer 1926.
- [11] FUBINI, G.: Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici. Annali della Scuola Normale, Pisa **9** (1904).
- [12] GRÜNWALD, J.: Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft. Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien IIa **80** (1911), 677–741.
- [13] HJELMSLEV, J.: Geometrie des droites dans l'espace non euclidien. Kopenhagen Verhandlg. Akad. (1900), 308–330.
- [14] KARZEL, H.: Kinematic spaces. Ist. Naz. Alta Math. Symposia Mathematica, **11** (1973), 413–439.
- [15] KARZEL, H.: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **41** (1974), 158–171.
- [16] LÜBBERT, C.: Über Regelflächen konstanter Striktion oder konstanten Dralls im elliptischen Raum. Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien, Kl. II **184** (1975), 12–28.
- [17] LÜBBERT, C.: Die kinematischen Geradenabbildungen. Habilitationsschrift. Prepint 278, Darmstadt (1976).
- [18] LÜBBERT, C.: Über geschlossene Regelflächen im elliptischen Raum. Journal of Geometry, Vol. **11/1** (1978), 35–54.
- [19] MÜLLER, H. R.: Die kinematischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum. Monatsh. Math. **65** (1961), 252–258.
- [20] MÜLLER, H. R.: Sphärische Kinematik. Berlin, VEB Deutscher Vlg. der Wiss. 1962.

- [21] REHBOCK, F.: Zur Abbildung des Punkt- und Ebenenraumes auf die Kinematik der hyperbolischen und elliptischen Ebene. *Monatsh. Math. Phys.* **38** (1931), 257–274.
- [22] REHBOCK, F.: Über parabolische Risse. *Math. Ann.* **109** (1934), 17–59.
- [23] SCHRÖDER, E.M.: Kennzeichnung und Darstellung kinematischer Räume metrischer Ebenen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **39** (1973), 184–229.
- [24] STRUBECKER, K.: Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation. *Sitzgsber. Akad. Wiss., Wien IIa* **139** (1930), 685–705.
- [25] STRUBECKER, K.: Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. *Journ. reine u. angew. Math.* **178** (1938), 135–173.
- [26] STRUBECKER, K.: Über Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. *Math. Zeitschr.* **52** (1950), 401–435.
- [27] STUDY, E.: *Geometrie der Dynamen*. Leipzig, Teubner 1903.
- [28] WUNDERLICH, W.: Eckhart-Rehbocksche Abbildung und Studysches Übertragungsprinzip. *Publicationes Mathematicae, Debrecen* **7** (1960), 94–107.